ANNALES DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

SUR LA REPRÉSENTATION

DES

COURBES GAUCHES ALGÉBRIQUES

ET

SUR LE NOMBRE DES CONDITIONS QUI EXPRIMENT QU'UNE COURBE ALGÉBRIQUE EST SITUÉE SUR UNE SURFACE ALGÉBRIQUE

PAR

Léon AUTONNE

INGÉNIEUR DES PONTS ET CHAUSSÉES
MAITRE DE CONFÉRENCES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LYON
LAURÉAT DE L'INSTITUT

PARIS
G. MASSON, ÉDITEUR
LIBRAIRE DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE
120, BOULEVARD SAINT-GERMAIN

1896

177

ANNALES DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

SUR LA REPRÉSENTATION

DES

COURBES GAUCHES ALGÉBRIQUES.

22246 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

ANNALES DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

SUR LA REPRÉSENTATION

DES

COURBES GAUCHES ALGÉBRIQUES

ET

SUR LE NOMBRE DES CONDITIONS QUI EXPRIMENT QU'UNE COURBE ALGÉBRIQUE EST SITUÉE SUR UNE SURFACE ALGÉBRIQUE,

PAR

LÉON AUTONNE,
INGÉNIEUR DES PONTS ET CHAUSSÉES,
MAITRE DE CONFÉRENCES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LYON,
LAURÉAT DE L'INSTITUT.

PARIS,
G. MASSON, ÉDITEUR,
LIBRAIRE DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE,
120, BOULEVARD SAINT-GERMAIN.

1896

SUR LA REPRÉSENTATION

DES

COURBES GAUCHES ALGÉBRIQUES

ET

SUR LE NOMBRE DES CONDITIONS QUI EXPRIMENT QU'UNE COURBE ALGÉBRIQUE EST SITUÉE SUR UNE SURFACE ALGÉBRIQUE.

INTRODUCTION.

On sait que dans son grand Travail sur la classification des courbes gauches algébriques (*Journal de l'École Polytechnique,* LII^e Cahier) Halphen a écarté les courbes à points multiples. Il m'a paru intéressant d'étendre à ces courbes quelques-uns des résultats obtenus par l'éminent géomètre.

Le premier point traité est la représentation d'une courbe gauche indécomposable G, de degré n.

Quand on représente G par les équations

$$f(x, y) = 0, \qquad z = \frac{P_1(x, y)}{P_0(x, y)},$$

le polynome f est indécomposable et a n pour degré; P_0 et P_1 sont deux polynomes ayant pour degrés deux nombres consécutifs s et $s+1$. Mais, sans changer la courbe, on peut remplacer P_0 et P_1 par deux autres polynomes P'_0 et P'_1, de degrés s' et $s'+1$, choisis à volonté, pourvu toutefois que l'expression

$$P'_1 P_0 - P'_0 P_1$$

soit divisible par f. Alors, en effet, sur la courbe $f=0$ les deux rapports $P_1 : P_0$ et $P'_1 : P'_0$ sont constamment égaux.

Il y a ainsi dans le choix des polynomes P_0 et P_1, dénominateur et numérateur de z, une dose d'arbitraire qu'il est intéressant d'évaluer.

Halphen (*Classification*, etc., p. 20 à 25) a démontré le théorème suivant : « Peut servir de dénominateur à z tout polynome $P_0(x, y)$ qui s'évanouit en chaque point double apparent. » La proposition, bien entendu, ne s'applique qu'aux courbes dénuées de points multiples. Quant aux autres, étrangères à l'objet de son travail, Halphen leur consacre quelques lignes à sa page 43. Il y énonce, sans démonstration, qu'en un point multiple le polynome P_0 satisfait à certaines conditions linéaires entre ses coefficients, conditions équivalentes à celles qui font passer la courbe $P_0=0$ par σ points. Le nombre σ prend le nom d'*équivalent* du point multiple. Halphen cite quelques exemples du calcul de σ (pour un point double, σ est toujours zéro; pour un point μ^{uple} à tangentes distinctes $\sigma=\frac{1}{2}(\mu-1), (\mu-2), \ldots,$ mais ne fournit aucune règle générale pour le calcul de σ, règle applicable à une singularité quelconque.

Le premier Chapitre de mon Mémoire a pour objet de compléter l'analyse d'Halphen.

Soit m un point multiple quelconque, que l'on peut toujours supposer à l'origine des coordonnées. Ce point m est l'origine d'un certain nombre M de cycles $C_i[i=1, 2, \ldots, M]$ d'ordres n_i. Les équations de C_i sont

$$x=t_i^{n_i}, \qquad y=\eta_i(t_i\theta_i^j)\equiv y_{ij}, \qquad z=\zeta_i(t_i\theta_i^j)\equiv z_{ij},$$

$\theta_i=$ racine primitive $n_i^{\text{ième}}$ de l'unité,

$$j=0, 1, \ldots, n_i-1; \qquad s=0, 1, 2, \ldots, n_i-1;$$

$$\eta_i(t)\equiv\sum_s a_{is}t^s, \qquad \zeta_i(t)\equiv\sum_s b_{is}t^s,$$

les a_{is} et b_{is} étant holomorphes en x, c'est-à-dire étant des développements qui procèdent suivant les puissances entières et positives de x.

D'après un théorème connu de M. Nœther, cité par Halphen à sa page 22, il faut et il suffit qu'il existe un développement holomorphe à deux indéterminées

$$\Omega(u, v)$$

tel que

$$\left\{\begin{array}{c}\Omega(x, y_{ij}) \equiv z_{ij} P_0(x, y_{ij}) \\ j = 0, 1, \ldots, n_i - 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, M\end{array}\right\},$$

pour que P_0 possède en m les qualités requises pour servir de dénominateur à z.

Je commence par fabriquer une expression

$$\Omega'(x, u) \equiv \sum_i \sum_j z_{ij} P_0(x, y_{ij}) \frac{\prod'_{i'j'} (u - y_{i'j'})}{\prod'_{i'j'} (y_{ij} - y_{i'j'})},$$

où le symbole $\prod'_{i'j'}$ indique que le facteur en y_{ij} ne figure pas dans le produit.

On a bien

$$\Omega'(x, y_{ij}) \equiv z_{ij} P_0(x, y_{ij}),$$

mais Ω' contient :

Des puissances fractionnaires de x;

Des dénominateurs.

Je me débarrasse des premières en transformant convenablement Ω',

$$\Omega'(x, u) \equiv \sum_i \frac{R_i(x, u)}{D(x) D_i(x)},$$

les R et les D étant holomorphes.

Si le produit DD_i contient x^{ρ_i} en facteur, Ω' est holomorphe quand x^{ρ_i} divise, dans R_i, le coefficient de chaque puissance de u. Cela exige que l'expression $P_0(x, y_{ij})$ soit divisible par une puissance de $x^{\frac{1}{n_i}} = t_i$ suffisamment élevée, et que l'on calcule immédiatement, car les D et les R sont explicitement formés à l'aide des a_{is} et b_{is}. Posons

$$P_0(x, y_{ij}) \equiv t_i^{\sigma_i} \{\ldots\}, \qquad x = t_i^{n_i};$$

σ_i est (terminologie d'Halphen) l' « ordre du polynome P_0 par rappor au cycle C_i ». σ_i est aussi le nombre de points, confondus au point multiple, communs au cycle C_i (ou, plus exactement, à la projection de C_i sur le plan des xy) et à la courbe $P_0 = 0$.

Appelons g la projection $f(x, y) = 0$ de la courbe G sur le plan des xy. Il est indifférent de parler, soit des cycles de g, soit de ceux de G, les premiers étant la projection des seconds. Les points multiples de G se projettent aussi en des points multiples de g.

Cela posé, nous pouvons énoncer le théorème suivant, généralisation du théorème d'Halphen :

« Peut servir de dénominateur à z un polynome P_0 pris à volonté, pourvu que la courbe $P_0 = 0$ passe par chaque point double apparent, coupe chaque cycle de g, issu d'un point multiple, en un nombre de points, confondus au point multiple, égal ou supérieur à un nombre fixe. »

Je démontre ensuite par ma méthode quelques résultats simplement énoncés par Halphen. Un point double n'impose à $P_0 = 0$ aucune condition; en un point μ^{uple} à tangentes distinctes, la courbe $P_0 = 0$ a un point $(\mu - 2)^{\text{uple}}$, ce qui fait bien $\frac{1}{2}(\mu - 1)(\mu - 2)$ conditions linéaires entre les coefficients de P_0.

Notons que pour l'application du théorème il n'est pas indispensable de posséder complètement les courbes G ou g; il suffit de connaître :

La position des points doubles apparents;

Les singularités, c'est-à-dire la position des points multiples ainsi que les développements en série, afférents à chaque point multiple.

On n'a même besoin de posséder, pour chaque développement, qu'un nombre fini des premiers termes.

Cette remarque est essentielle, lorsque par exemple G est envisagée comme donnée par une équation différentielle H. En effet, H ne fournit directement que des développements en série.

Telle est la matière du Chapitre I. Le Chapitre II est consacré au calcul du nombre $\mathfrak{N}$ des conditions qui expriment qu'une courbe algébrique G de degré n est située sur une surface algébrique $\mathfrak{f}$ de degré N.

Une limite supérieure $nN + 1$ est évidente pour $\mathfrak{N}$. Il suffit en effet, au pis aller, d'exprimer que $\mathfrak{f}$ passe par $nN + 1$ points arbitraires de G. Mais il est bien connu que souvent

$$\mathfrak{N} < nN + 1.$$

Halphen a démontré à cet égard une formule importante [*Classification*, etc., p. 36; c'est la formule (20) écrite avec mes notations]

$$\mathfrak{N} = nN + 1 - p + \varpi + \frac{(s + N - n + 1)(s + N - n + 2)}{2} \mathcal{F}(s + N - n).$$

Dans cette formule les lettres ont la signification que voici :

p est le genre de G; la courbe G étant donnée comme toujours par

$$f(x, y) = 0 \qquad z = P_1(x, y) : P_0(x, y);$$

s est le degré de P_0;

$\mathfrak{I}(\omega)$ est une fonction de ω, telle que $\mathfrak{I}(\omega) = 1$ si $\omega < 0$ et $\mathfrak{I}(\omega) = 0$ si $\omega \geqq 0$;

enfin l'entier positif ϖ exige quelques explications plus compliquées.

Les courbes $P_0 = 0$ et g, c'est-à-dire $f = 0$, se coupent en sn points, savoir : deux points en chacun des δ points doubles apparents, et $ns - 2\delta$ autres points; soit en tout $ns - \delta$ points formant un groupe Δ. Cela étant, si l'ensemble des courbes de degré $s + N$, qui passent par le groupe Δ, est $(h - 1)^{\text{uplement}}$ infini, alors

$$h = \frac{(s + N + 1)(s + N + 2)}{2} - (ns - \delta) + \varpi;$$

d'où ϖ.

La formule appelle deux remarques. D'abord, comme on l'a vu plus haut, la courbe $P_0 = 0$ est assujettie uniquement à passe par les δ points doubles apparents; s n'est ainsi limité qu'inférieurement et il est licite de supposer $s + N - n > 0$ et

$$\mathfrak{I}(s + N - n) = 0.$$

Il est beaucoup plus difficile de se débarrasser de l'entier ϖ. Halphen démontre que dans certains cas, notamment pour N assez grand, $\varpi = 0$, mais ne fournit aucun moyen général pour calculer ϖ. En réalité, tout ce que démontre Halphen c'est que, après la limite supérieure $nN + 1$, $\mathfrak{N}$ possède encore la limite inférieure $nN + 1 - p$.

La question a récemment été reprise par M. G. Castelnuovo [1]. Voici les importants résultats obtenus par ce géomètre par des procédés entièrement différents de ceux d'Halphen. Appelons χ l'entier défini par les inégalités

$$\frac{n-1}{2} - 1 \leqq \chi < \frac{n-1}{2}$$

---

[1] « Sui multipli di una serie lineare di gruppi di punti appartenente ad una curva algebrica » (*Rendiconti* du Cercle mathématique de Palerme, séances des 11 et 25 juin 1893). Voici la correspondance des notations. Le nombre r des dimensions de l'hyperespace est 3 pour l'espace ordinaire, où je reste; la surface a pour degré $k = N$. La dimension r_k de la série linéaire est $\mathfrak{N} - 1$.

et π le genre maximum que peut posséder une courbe de degré n. On a d'abord

$$\pi = \chi(n - 2 - \chi).$$

Quant à $\mathfrak{N}$, ce nombre possède d'abord, lorsque $N < \frac{n-1}{2}$, une limite inférieure, qui ne dépend que de N, savoir $(N+1)^2$. En second lieu il existe un entier, inférieur ou égal à $\chi + \pi - p$, tel que, si N dépasse cet entier,

$$\mathfrak{N} = nN + 1 - p - d,$$

$$0 \leqq d \leqq \pi - p.$$

Il y a ainsi contradiction entre les résultats d'Halphen et de M. Castelnuovo. Cela tient à ce que le procédé d'Halphen conduit, pour exprimer que la courbe G est sur la surface f, à écrire $\mathfrak{N}$ relations, mais n'établit pas qu'elles sont toutes distinctes.

Le second Chapitre du présent Mémoire a pour but d'étendre l'analyse d'Halphen aux courbes à singularités quelconques. Est établie la formule suivante

$$\mathfrak{N} = nN + 1 - p - \Sigma \mathfrak{L} + \varpi.$$

ϖ a la même signification que dans la formule d'Halphen. La somme Σ est étendue aux divers points multiples de G, dont chacun *abaisse le genre de $\mathfrak{L}$ unités.*

Lorsque G est donnée, ϖ se calcule sans difficulté. On construira le groupe Δ, introduit ci-dessus, et l'ensemble des courbes de degré $s + N$ qui passent par les points du groupe Δ.

Mais lorsque l'on ne connaît de G que le degré n, le genre p et les singularités, on ne peut calculer ϖ.

Quant à l'évaluation de $\mathfrak{L}$, elle exige seulement qu'on connaisse un nombre limité des premiers termes dans les développements en série, afférents à chaque point multiple de G (¹).

(¹) Les principaux résultats du présent Travail ont été communiqués à l'Académie des Sciences à la séance du 12 novembre 1894.

Lyon, le 1er mars 1895.

CHAPITRE I.

REPRÉSENTATION DES COURBES GAUCHES ALGÉBRIQUES.

1. Le point de départ dans les présentes recherches est la théorie des *cycles* des courbes algébriques planes ou gauches, théorie due à Cayley, à MM. Zeuthen, Nœther et surtout à Halphen. Elle est déjà devenue classique et il est bien inutile de la reproduire ici. D'ailleurs, un peu plus bas, je cite les sources à consulter.

Je me borne à rappeler les propriétés des cycles dont l'usage sera le plus continuel dans la suite.

Tout point $m_0(x_0, y_0, z_0)$, pris sur une courbe algébrique G et à distance finie (sans quoi il suffirait de changer de coordonnées), est l'origine d'un nombre fini M de cycles $C_i (i = 1, 2, 3, \ldots, M)$. Le cycle C_i, ayant n_i pour ordre, est, pour un module de t_i assez petit, représenté par les équations

$$(o)\quad \left\{\begin{array}{l} y - y_0 = \eta_i(t_i\theta_i^j) \equiv y_{ij}, \\ z - z_0 = \zeta_i(t_i\theta_i^j) \equiv z_{ij}, \\ x - x_0 = t_i^{n_i}; \\ \theta_i = \text{racine primitive } n_i^{\text{ième}} \text{ de l'unité}; \\ j = 0, 1, 2, 3, \ldots, n_i - 1; \\ \eta_i(t) \equiv \sum_s a_{is} t^s, \qquad \zeta_i(t) \equiv \sum_s b_{is} t^s; \\ s = 0, 1, \ldots, n_i - 1; \\ \text{les } a_{is} \text{ et } b_{is} \text{ étant } \textit{holomorphes} \text{ en } x - x_0. \end{array}\right.$$

En disant que a_{is} ou b_{is} est holomorphe en $x - x_0$, j'entends que a_{is} et b_{is} sont des développements qui procèdent suivant les puissances entières et positives de $x - x_0$. Chacune des puissances de θ_i fournit une des n_i *branches* du cycle.

Le point m_0 est multiple sur G, sauf si $M = n_i = 1$.

Les formules (o) sont exactes pour une orientation quelconque des axes de coordonnées et peuvent être mises en défaut pour une orientation particulière. Prenons le cas le plus simple : supposons sur une courbe plane un point ordinaire à l'origine, mais prenons la tangente pour axe des y. La coordonnée y sera représentée par *deux* développements

$$y = x^{\frac{1}{2}} + \ldots \qquad y = -x^{\frac{1}{2}} + \ldots.$$

Voilà donc une précaution à prendre dans le choix des axes.

Les cycles ont fait l'objet, de la part d'Halphen, de nombreuses publications; les aperçus et la terminologie ont varié. La rédaction la plus définitive me semble contenue dans deux Mémoires que je suivrai constamment.

Ce sont :

Pour les courbes planes, Appendice à l'édition française, parue en 1884, du *Traité de Géométrie analytique* (courbes planes) de Salmon;

Pour les courbes gauches, *Mémoire sur les singularités des courbes gauches algébriques*, inséré au tome VI du *Bulletin de la Société mathématique de France* (p. 10 à 43).

2. Conformément à des théories classiques, j'envisage la courbe algébrique gauche G comme donnée par les équations

$$f(x, y) = 0 \qquad z = \frac{P_1(x, y)}{P_0(x, y)};$$

f, P_0, P_1 sont des polynomes ayant pour degrés : f le degré n de la courbe G, P_0 et P_1 deux entiers consécutifs s et $s+1$. Le polynome f est indécomposable.

Géométriquement cela revient à prendre G comme l'intersection d'un cône de degré n,

$$f(x, y) = 0,$$

ayant pour sommet le point $S(x = y = 0,\ z = \infty)$, avec un monoïde de degré $s+1$,

$$z P_0(x, y) - P_1(x, y) = 0.$$

L'intersection comprend en outre ns droites issues de S et perçant le plan X, $z = 0$, aux points $f = P_0 = P_1 = 0$. Pour toutes explications détaillées je renvoie à mon Mémoire *Sur la limitation du degré pour les intégrales algébriques de l'équation différentielle du premier ordre* (Chapitre I), inséré au LXIII[e] Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

La courbe plane g, $f(x, y) = 0$, est la perspective de G sur le plan X des xy. Nous supposerons que le point de vue S de la perspective n'occupe par rapport à G aucune situation particulière. Alors tout point simple de g est la perspective d'un point simple de G; les points multiples de G auront pour perspective des points multiples de g. De plus g aura des points doubles *apparents* formés par la perspective commune des deux points simples de G, situés sur une corde issue de S. Comme la situation de S dans l'espace est quelconque, les points doubles apparents seront à tangentes séparées. Tout point multiple de g, qui n'est pas un point double apparent, est la perspective d'un point multiple de G.

3. On peut, sans changer la courbe G,

$$f(x, y) = 0 \qquad z = P_1(x, y) : P_0(x, y),$$

remplacer les polynomes P_0 et P_1 par deux autres *quelconques*, par exemple P'_0 et P'_1, pourvu que l'expression

$$P_0 P'_1 - P_1 P'_0$$

soit divisible par f. Il y a ainsi, dans le choix des polynomes, numérateur et dénominateur de z, un certain arbitraire, dont il s'agit de faire l'évaluation. Je vais chercher à quelles conditions doit satisfaire un polynome $P_0(x, y)$ pour pouvoir servir de dénominateur à z.

4. Considérons deux variables x et y, liées par l'équation $f(x, y) = 0$, de la courbe g. Une fonction algébrique w de la variable x est identique à une fonction rationnelle de x et de y. Je vais définir les cas où w est un polynome en x et y.

Soit $m(x_0, y_0)$ un point de g; la fonction algébrique y aux abords de m est représentée par les diverses équations (o) du 1

$$\begin{array}{lll} y - y_0 = y_{ij}, & i = 1, 2, \ldots, & M, \\ x - x_0 = t_i^{n_i}, & j = 0, 1, 2, \ldots, & n_i - 1; \end{array}$$

la fonction w est représentée par les équations *correspondantes*

$$w = w_{ij}$$

obtenues en remplaçant dans la fraction rationnelle en x et y, identique à w,

$$\begin{array}{lll} x & \text{par} & x_0 + t_i^{n_i}, \\ y & \text{par} & y_0 + y_{ij}. \end{array}$$

S'il existe un développement holomorphe à deux arguments

$$\Omega(u, v),$$

tel que

$$\Omega(t_i^{n_i}, y_{ij}) \equiv w_{ij}$$

$$[i = 1, 2, \ldots, M, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, \qquad n_i - 1],$$

alors on dit que w *a, au point m, le caractère d'une fonction entière* de x et de y.

D'un théorème de M. Nœther, cité par Halphen (*Classification*, etc., p. 22), résulte ceci : « Pour que w soit effectivement un polynome en x et y, il faut et il suffit que w possède, en tous les points de la courbe g, le caractère d'une fonction entière. »

Ainsi pour qu'un polynome $P_0(x, y)$ puisse servir de dénominateur (3) à z, il suffit d'exprimer que le produit $w = P_0 z$ a, en tout point de la courbe g, le caractère d'une fonction entière de x et de y. Ce sera alors effectivement un polynome $P_1(x, y)$ et $z = P_1 : P_0$.

5. Tout se réduit ainsi à construire pour le point m le développement holomorphe ci-dessus (4) à deux indéterminées

$$\Omega(u, v).$$

Je ferai un fréquent usage de développements holomorphes, supposés, bien entendu, convergents pour des modules assez petits des variables. Il est à peine besoin de rappeler que dans le calcul on traite ces développements holomorphes comme de simples polynomes, moyennant certaines précautions bien connues.

Voici maintenant une notion importante, due aussi à Halphen.

Soit $Q(x, y)$ un polynome. Considérons le cycle C_i de la courbe g, ayant le point $m(x_0, y_0)$ pour origine, et défini par les équations (*voir* 1 et 4)

$$x - x_0 = t_i^{n_i}, \qquad y - y_0 = y_{ij}.$$

Le développement

$$Q(x_0 + t_i^{n_i}, y_0 + y_{ij})$$

contiendra en facteur une puissance entière de t_i, dont l'exposant ρ_i, indépendant de l'indice j, sera *l'ordre du polynome* Q *par rapport au cycle* C_i. Je désignerai l'entier positif ρ_i par le symbole

$$|C_i, Q|,$$

la première lettre entre les barres verticales désignant le cycle et la lettre de droite par rapport à la virgule désignant le polynome.

Rien n'est à changer dans la définition précédente si Q est un développement holomorphe en $x - x_0$ et $y - y_0$.

Si Q est un polynome, la courbe $Q = 0$ coupe le cycle C_i à l'origine m du cycle en

$$|C_i, Q|$$

points confondus.

Reprenons (4) le produit $w = P_0 z$; si le développement z_{ij} [1, formules (o)] débute par une puissance σ_i de t_i, l'entier positif σ_i sera indépendant de l'indice j; on pourra parler aussi de *l'ordre de z par rapport au cycle* C_i et poser

$$\sigma_i = |C_i, z|.$$

De plus

$$|C_i, w| = |C_i, P_0| + |C_i, z|.$$

Ainsi « pour rendre $|C_i, w|$ aussi grand que l'on voudra, il suffit de prendre $|C_i, P_0|$ assez grand ».

6. Avant de passer à la construction du développement holomorphe $\Omega(u, v)$ (5 et 4), je vais résoudre un problème préliminaire simple.

Soient y et p

$$y = \eta(t) \equiv \sum_s a_{1s} t^s, \qquad t^r = x,$$

$$p = \varpi(t) \equiv \sum_s b_s t^s, \qquad s = 0, 1, \ldots, r-1,$$

$$a_s,\ b_s \text{ holomorphes en } x,$$

deux fonctions de x à r déterminations et s'évanouissant avec x. Appelons

$$y_l \equiv \eta(t\theta^l) \qquad \text{et} \qquad p_l \equiv \varpi(t\theta^l)$$

$$[l = 0, 1, \ldots, r-1; \qquad \theta = \text{racine primitive } r^{\text{ième}} \text{ de l'unité}]$$

les r déterminations.

Je vais construire un polynome $S(x, u)$ en u, à coefficients holomorphes en x, et une fonction holomorphe $D(x)$, telle que

$$\frac{S(x, y_l)}{D(x)} = p_l, \qquad l = 0, 1, \ldots, r-1.$$

A cet effet, par simple multiplication et sous le bénéfice de $t^r = x$, je forme les $r-1$ identités, $m=1, 2, \ldots, r-1$,

$$y_l^m \equiv \sum_s a_{ms}(t\theta^l)^s, \qquad s=0, 1, \ldots, r-1,$$

entre lesquelles et

$$p_l \equiv \sum_s b_s(t\theta^l)^s$$

j'élimine les $r-1$ quantités $(t\theta^l)^s$, $s=1, 2, \ldots, r-1$.

Il viendra ainsi l'identité

$$0 \equiv \begin{vmatrix} y_l - a_{10} & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,r-1} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_l^{r-1} - a_{r-1,0} & a_{r-1,1} & a_{r-1,2} & \ldots & a_{r-1,r-1} \\ p_l - b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_{r-1} \end{vmatrix} \equiv \Delta.$$

Si donc le déterminant

$$D(x) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,r-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r-1,1} & \ldots & \ldots & a_{r-1,r-1} \end{vmatrix}$$

n'est pas $\equiv 0$, le développement du déterminant Δ fournit

$$(p_l - b_0)D(x) + R(x, y_l) \equiv 0$$

et il suffit de prendre pour S l'expression de la forme voulue

$$b_0 D(x) - R(x, u).$$

Cherchons si D peut être identiquement nul.

7. Les r fonctions y_l sont racines de l'équation algébrique Y de degré r en u à coefficients holomorphes en x

$$\varphi(x, u) = \prod_l (u - y_l) = u^r + A_1 u^{r-1} + \ldots = 0.$$

Lemme. — Il n'y a aucune racine commune avec une autre équation Y' de même forme

$$u^r + A'_1 u^{r-1} + A'_2 u^{r-2} + \ldots = 0.$$

Si, en effet, y_0, par exemple, est racine de Y', faisons faire à la variable x dans son plan le tour de l'origine; les coefficients de Y' ne changent pas tandis que y_0 se transforme en y_1; y_1 est donc racine de Y', et ainsi de suite. Y et Y' auraient les mêmes racines; mais les coefficients sont de part et d'autre, pour Y et Y', les mêmes fonctions symétriques des racines : donc $A'_1 \equiv A_1$, $A'_2 \equiv A_2$, ... C. Q. F. D.

Cela posé, considérons le système

$$\sum_{s=1}^{s=r-1} a_{ms}(t\theta^l)^s = y_l^m - a_{m0}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots, r-1$$

de $r-1$ équations linéaires par rapport aux $r-1$ inconnues $(t\theta^l)^s$; $D(x)$ est précisément le déterminant des inconnues. Le système ne peut être incompatible; si donc $D(x) \equiv 0$, le système doit être indéterminé; il existe alors, entre les seconds membres, au moins une relation linéaire et homogène. y_l est racine d'une équation

$$\psi(x, u) = B_1 u^{r-1} + B_2 u^{r-2} + \ldots = 0,$$

à coefficients holomorphes et un au moins des B n'est pas identiquement nul. y_l est alors racine aussi de l'équation

$$\varphi(x, u) + \psi(x, u) = u^r + (A_1 + B_1) u^{r-1} + \ldots = 0,$$

laquelle, en vertu du lemme, doit se confondre avec Y; alors $B_1 \equiv 0$, $B_2 \equiv 0$, ..., ce qui est absurde. Ainsi $D(x) \not\equiv 0$.

En résumé, on a la proposition suivante : « Soient y et p

$$y = \eta(t) \equiv \sum_s a_{1s} t^s \qquad \text{et} \qquad p = \varpi(t) \equiv \sum_s b_s t^s$$

$$[a_s, b_s = \text{holomorphes en } x; \qquad t^r = x; \qquad s = 0, 1, \ldots, r-1]$$

deux fonctions d'x, nulles avec x, possédant r déterminations correspondantes y_l et p_l, $l = 0, 1, \ldots, r-1$; il existe un polynome $S(x, u)$ en u, à coefficients holomorphes en x, et une fonction holomorphe $D(x)$, tels que l'expression

$$R(x, u) = \frac{S(x, u)}{D(x)}$$

devient identique à p_l, quand on y remplace l'indéterminée u par y_l, et cela pour chacun des indices $l = 0, 1, \ldots, r-1$. »

Il est important pour la suite (15) de remarquer que les coefficients du polynome S en u sont linéaires et homogènes par rapport aux b_s.

8. Je passe maintenant à la recherche des conditions auxquelles doit satisfaire un polynome $P_0(x, y)$ pour pouvoir servir de dénominateur à z (4). Le produit $w = P_0 z$ doit avoir en tout point de la

courbe plane g, perspective de G, le caractère de fonction entière (4). Soit m (x_0, y_0) un point de g, origine de M cycles C_i représentés par les équations (o) du 1, savoir

$$x - x_0 = t_i^{n_i}, \qquad y - y_0 = y_{ij},$$
$$j = 0, 1, 2, \ldots, n_i - 1; \qquad i = 1, 2, \ldots, M.$$

Il faut et il suffit (5) qu'il existe un développement holomorphe à deux arguments $\Omega(u, v)$ tel que

$$\Omega(t_i^{n_i}, y_{ij}) \equiv w_{ij},$$

le développement w_{ij} correspondant à y_{ij}.

9. Pour simplifier l'écriture je transporte l'origine des coordonnées au point $m_0(x_0, y_0, z_0)$ de G dont le point $m(x_0, y_0)$ de g est la perspective. Alors $x_0 = y_0 = z_0 = 0$.

Les équations (o) du 1 deviennent

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = t_i^{n_i}, \qquad y = y_{ij} \equiv \eta_i(t_i\theta_i^j), \qquad z = z_{ij} \equiv \zeta_i(t_i\theta_i^j); \\ \eta_i(t) \equiv \sum_s a_{is} t^s, \qquad \zeta_i(t) \equiv \sum_s b_{is} t^s; \\ s = 0, 1, \ldots, n_i - 1; \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, n_i - 1; \\ i = 1, 2, 3, \ldots, M. \end{array} \right.$$

Le développement de P_0 correspondant à y_{ij} sera

$$q_{ij} \equiv \sum_s c_{is}(t_i\theta_i^j)^s,$$

et w_{ij} devient

$$w_{ij} \equiv \sum_s d_{is}(t_i\theta_i^j)^s \equiv z_{ij} q_{ij}.$$

On voit que les fonctions d_{is} sont linéaires et homogènes par rapport aux fonctions c_{is} du développement q_{ij}.

10. Tout cela posé, je prends l'expression

$$\Omega' \equiv \sum_i \sum_j w_{ij} \frac{\prod'_{i'j'}(u - y_{i'j'})}{\prod'_{i'j'}(y_{ij} - y_{i'j'})},$$

$$i, i' = 1, 2, \ldots, M; \qquad j, j' = 0, 1, 2, \ldots, n_i - 1,$$

où le symbole $\prod\limits_{i'j'}'$ désigne un produit où manque le facteur en y_{ij}.

L'expression Ω' se réduit bien à w_{ij} quand on y remplace l'indéterminée u par y_{ij} ; Ω' est bien un polynome en u; mais, par rapport à l'autre argument x, Ω' n'est pas holomorphe parce qu'il figure dans Ω' : des puissances de x à exposants fractionnaires; des dénominateurs en x.

Je vais me débarrasser des exposants fractionnaires en montrant que Ω' est identique à une expression quotient de deux développements holomorphes.

11. Prenons le cycle C_i et considérons les n_i développements w_{ij}, $j=0, 1, 2, \ldots, n_i-1$. En vertu du théorème énoncé au n° 7, il existe un polynome $S_i(x, v)$ de degré n_i-1 en v à coefficients holomorphes en x et aussi une fonction holomorphe $D_i(x)$, tels que l'expression

$$\frac{S_i(x, y_{ij})}{D_i(x)} \equiv w_{ij}.$$

Il est donc licite de remplacer, dans Ω', w_{ij} par

$$\frac{S_i(x, y_{ij})}{D_i(x)}.$$

Remarquons (7 *in fine*) que les coefficients du polynome S_i sont linéaires et homogènes en d_{is} (lesquels jouent ici le rôle des b_s du 7), coefficients (9) de w_{ij}, c'est-à-dire linéaires et homogènes (9) en c_{is}, coefficients du développement $P_0(t^{n_i}, y_{ij})$.

12. Appelons $\varphi_i(x, v)$ le produit

$$\prod_j (v-y_{ij}), \qquad j=0, 1, 2, \ldots, n_i-1,$$

l'équation algébrique $\varphi_i=0$ de degré n_i en v, à coefficients holomorphes en x, est l'équation Y (7) relative au cycle C_i. Posons enfin

$$(i=1, 2, \ldots, M), \qquad \Phi(x, v)=\prod_i \varphi_i(x, v).$$

Le produit (10)

$$\prod_{i'j'}'(u-y_{i'j'})$$

est identique au produit

$$\prod_{i'j'}(u - y_{i'j'})$$

où l'on aurait supprimé le facteur $u - y_{ij}$. Mais le produit Π est évidemment identique à $\Phi(x, u)$ et

$$\Pi' \equiv (u - y_{ij})^{-1}\Phi(x, u).$$

Quand un polynome est divisible par un binome, le quotient a ses coefficients entiers par rapport au coefficient du binome. C'est le cas pour Φ, polynome en u, et pour le binome $u - y_{ij}$. Ainsi

$$\Pi' \equiv f(x, u, y_{ij}),$$

f étant un polynome en u et y_{ij}, à coefficients holomorphes en x.

Il est donc licite de remplacer dans Ω' (10)

$$\prod_{i'j'}{}'(u - y_{i'j'}) \qquad \text{par} \qquad f(x, u, y_{ij}).$$

13. Reprenons

$$\Phi(x, u) \equiv \prod_{i'j'}(u - y_{i'j'}).$$

Alors

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u} \equiv \sum_i \sum_j \prod_{i'j'}{}'(u - y_{i'j'})$$

$$j, j' = 0, 1, 2, \ldots, n_i; \; i, i' = 1, 2, \ldots, \mathrm{M},$$

le facteur en y_{ij} étant comme précédemment exclus du produit Π'.

Il vient l'identité évidente

$$\text{(o)} \qquad \left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)_{u=y_{ij}} \equiv \prod_{i'j'}{}'(y_{ij} - y_{i'j'}).$$

Rappelons maintenant un théorème bien connu d'Algèbre élémentaire : « Soient $\mathrm{A}(u)$ et $\mathrm{B}(u)$ deux polynomes en u; on peut construire deux autres polynomes $\mathrm{A}'(u)$ et $\mathrm{B}'(u)$ tels que

$$\mathrm{AA}' + \mathrm{BB}' \equiv \mathrm{D},$$

D ne contenant plus u; la constante D et les coefficients de A′ et B′ sont des polynomes par rapport aux coefficients de A et B. » Appliquons le théorème aux deux polynomes en u Φ et $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$. Il viendra l'identité

$$(1) \qquad D(x) \equiv \Phi(x, u) Q'(x, u) + \frac{\partial \Phi}{\partial u} Q(x, u).$$

Q et Q' sont des polynomes en u à coefficients holomorphes en x; D est aussi holomorphe en x. Tout cela provient de ce que Φ a ses coefficients holomorphes.

Remplaçons dans l'identité (1) l'indéterminée u par y_{ij}; comme

$$\Phi(x, y_{ij}) \equiv 0,$$

on a

$$D(x) \equiv \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right)_{u=y_{ij}} Q(x, y_{ij}).$$

Il est donc licite, en vertu de l'identité (o) ci-dessus, de remplacer dans Ω' (10)

$$\prod_{i'j'}{}' (y_{ij} - y_{i'j'})$$

par

$$\frac{D(x)}{Q(x, y_{ij})}.$$

14. Cela posé, reprenons (10) l'expression

$$\sum_i \sum_j w_{ij} \frac{\prod_{i'j'}' (u - y_{i'j'})}{\prod_{i'j'}' (y_{ij} - y_{i'j'})},$$

et remplaçons-y respectivement

$$(11) \qquad w_{ij} \quad \text{par} \quad \frac{S_i(x, y_{ij})}{D_i(x)}.$$

$$(12) \qquad \prod_{i'j'}{}' (u - y_{i'j'}) \quad \text{par} \quad f(x, u, y_{ij}).$$

$$(13) \qquad \prod_{i'j'}{}' (y_{ij} - y_{i'j'}) \quad \text{par} \quad \frac{D(x)}{Q(x, y_{ij})}.$$

Il viendra

$$\Omega' \equiv \sum_i \sum_j \frac{S_i(x, y_{ij}) Q(x, y_{ij}) f(x, u, y_{ij})}{D(x) D_i(x)}.$$

L'expression

$$R'_i = \sum_j S_i(x, y_{ij}) Q(x, y_{ij}) f(x, u, y_{ij})$$

est une fonction symétrique entière des racines y_{ij} de l'équation à coefficients holomorphes (12)

$$0 = \varphi_i(x, v) = \sum_j (v - y_{ij}) = v^{n_i} + \ldots.$$

Ainsi R'_i est identique à un polynome $R_i(x, u)$ à coefficients holomorphes.

Donc

$$\Omega' \equiv \sum_i \frac{R_i(x, u)}{D_i(x) D(x)}.$$

J'ai ainsi débarrassé l'expression Ω' des puissances fractionnaires de x. Reste maintenant à débarrasser Ω' de ses dénominateurs.

15. Supposons que D_i contiènne en facteur x^{δ_i} et D contienne x^{δ}; on aura

$$\frac{1}{D_i D} \equiv x^{-(\delta+\delta_i)} \Delta_i(x),$$

Δ_i étant holomorphe. Ω' sera donc holomorphe si tous les coefficients du polynome $R_i(x, u)$ en u contiennent en facteur une puissance de x, ayant un exposant au moins égal à $\delta + \delta_i$.

Posons

$$S_i(x, v) \equiv B_{i0} + B_{i1} v + \ldots + B_{i,n_i-1} v^{n_i-1},$$

les B étant holomorphes.

Les coefficients T du polynome $R_i(x, u)$ en u sont linéaires et homogènes par rapport aux B; $R_i \equiv T_{i0} + T_{i1} u + T_{i2} u^2 + \ldots.$

En vertu de la façon (6, 7 et 11) dont $S_i(x, u)$ a été construit, les B sont linéaires et homogènes par rapport aux d_{is} (9)

$$w_{ij} \equiv P_0(t_i^{n_i}, y_{ij}) z_{ij} \equiv \sum_s d_{is} (t_i \theta_i^j)^s.$$

A leur tour les d_{is} sont linéaires et homogènes par rapport aux c_{is} (9),

$$q_{ij} \equiv \mathrm{P}_0(t_i^{n_i}, y_{ij}) \equiv \sum_s c_{is}(t_i \theta_i^j)^s.$$

Bref les T sont linéaires et homogènes par rapport aux c_{is}.

Si nous posons $c_{is} \equiv x^{\alpha_{is}} c'_{is}$, $c'_{is} \neq 0$ pour $x = 0$, il viendra

$$q_{ij} \equiv \sum_s c'_{is} \theta_i^{js} t_i^{n_i \alpha_{is} + s}.$$

Comme $s < n_i$ il ne peut y avoir dans q_{ij}, réduction entre des termes qui appartiennent à des indices s différents; ainsi l'ordre en t_i de q_{ij}, c'est-à-dire $|\mathrm{C}_i, \mathrm{P}_0|$, est précisément le plus petit des nombres $n_i \alpha_{is} + s$.

En vertu de ce qui précède pour rendre tous les T, combinaisons linéaires et homogènes des c_{is}, divisibles par $x^{\delta+\delta_i}$, il suffit de prendre un

$$|c_i, \mathrm{P}_0|,$$

suffisamment grand, ce qui rend tous les

$$n_i \alpha_{is} + s$$

suffisamment grands. Au pis-aller

$$|c_i, \mathrm{P}_0| = \delta + \delta_i.$$

En résumé, « la connaissance des développements en série, qui fournissent les coordonnées d'un point courant sur G aux abords du point multiple (ou la connaissance d'un nombre assez grand des premiers termes), suffit pour calculer un système d'entiers σ_i, tels que, si

$$|c_i, \mathrm{P}_0| > \sigma_i,$$

$\mathrm{P}_0 z$ a au point multiple le caractère de fonction entière et cela grâce à l'existence du développement holomorphe à deux indéterminées $\Omega(x, u)$ ».

16. La condition (15) $|c_i, \mathrm{P}_0| > \sigma_i$ suffit pour assurer l'existence de Ω, mais il n'est pas évident que cela soit nécessaire pour rendre tous les T_{ik} (15) divisibles par $x^{\delta+\delta_i}$. J'ai donc trouvé pour le polynome $\mathrm{P}_0(x, y)$ des conditions peut-être trop sévères. Je n'approfondirai pas davantage cette matière, car ce que j'ai établi suffit pour les théories du Chapitre suivant et pour la représentation des courbes gauches algébriques.

17. Toute la présente discussion se résume ainsi :

Théorème. — « Pour qu'un polynome $P_0(x, y)$ puisse servir de dénominateur à z, il suffit que l'ordre de P_0 par rapport à chaque cycle issu d'un point de la courbe G ne soit pas inférieur à un nombre déterminé pour chaque cycle ».

Étudions donc ce qui se passe en un point ordinaire, en un point double apparent, en quelques points à singularité simple.

18. En un point ordinaire (x_0, y_0, z_0), P_0 n'est soumis à aucune condition. En effet aux abords du point

$$\begin{aligned} y - y_0 &= a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots, \\ z - z_0 &= b_1(x - x_0) + b^2(x - x_0)^2 + \dots, \end{aligned}$$

z est déjà par lui-même holomorphe en $x - x_0$.

Prenons maintenant un point double apparent (x_0, y_0), projection commune des deux points (x_0, y_0, z_0) et (x_0, y_0, z'_0). Les deux développements qui définissent la courbe G aux abords du point double apparent sont

$$\left\{ \begin{aligned} y - y_0 &= Y = a_1(x - x_0) + \dots, \\ z - z_0 &= Z = b_1(x - x_0) + \dots, \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} y - y_0 &= Y' = a'_1(x - x_0) + \dots, \\ z - z'_0 &= Z' = b'_1(x - x_0) + \dots, \end{aligned} \right.$$

z_0 et z'_0 sont les ordonnées des deux points de G projetés en x_0 et y_0, $z_0 \neq z'_0$. Comme les deux tangentes (2) au point double apparent sont distinctes $a_1 \neq a'_1$.

Soient W et W' les deux développements du produit $zP_0(x, y)$; l'expression

$$\Omega = \frac{W(u - Y') - W'(u - Y)}{Y - Y'}$$

se réduit bien à W et W' quand on remplace l'indéterminée u par Y et Y' respectivement. Or

$$Y - Y' = (a_1 - a'_1)(x - x_0) + \dots \qquad a_1 - a'_1 \neq 0$$

$$\begin{aligned} W &= z_0 P_0(x_0, y_0) + (x - x_0)[\dots], \\ W' &= z'_0 P_0(x_0, y_0) + (x - x_0)[\dots]. \end{aligned}$$

Pour que Ω soit holomorphe en u et x il suffit que $P_0(x_0, y_0) = 0$. La condition est nécessaire car z doit avoir deux valeurs z_0 et z'_0; or $z = P_1 : P_0$. Ainsi : « en un point double apparent le polynome P_0 s'évanouit ».

Le fait a déjà été démontré par Halphen un peu autrement (*Classification*, etc., p. 23).

19. En un point (x_0, y_0) projection d'un point (x_0, y_0, z_0) multiple à singularités élevées, le théorème du 17 impose à la courbe $P_0 = 0$ des sujétions nombreuses, que nous étudierons en détail plus loin (20) sur des exemples.

Signalons un cas où aucune sujétion n'est imposée à P_0, malgré la multiplicité du point (x_0, y_0, z_0) considéré.

C'est le cas où il passe par G une surface $F(x, y, z) = 0$, telle que la dérivée partielle $\frac{\partial F}{\partial z}$, par exemple, ne s'annule pas en (x_0, y_0, z_0). Alors $z - z_0$ est, sur la surface, holomorphe en $x - x_0$ et $y - y_0$,

$$z - z_0 = \Omega(x - x_0, y - y_0).$$

La courbe est sur la surface; donc, si l'on remplace $x - x_0$ et $y - y_0$ par leurs développements en série sur la courbe G, Ω devient identique au développement correspondant de $z - z_0$. Donc $z - z_0$ possède, quel que soit P_0, le caractère de fonction entière, etc.

20. Étudions maintenant ce qui se passe en un point μ^{uple} de G à tangentes séparées. J'y transporte l'origine. Alors les développements sont, pour chaque cycle C_i,

$$\begin{cases} y = Y_i \equiv a_i x + \dots & i = 1, 2, \dots, \mu, \\ z = Z_i \equiv b_i x + \dots \end{cases}$$

tous les a_i étant distincts. Pareillement,

$$w = zP_0 = W_i \equiv Z_i P_0(x, Y_i).$$

L'expression

$$\Omega(x, u) = \sum_i W_i \frac{\prod'_{i'} (u - Y_{i'})}{\prod'_{i'} (Y_i - Y_{i'})}, \qquad i' \neq i$$

est bien telle que

$$\Omega(x, Y_i) \equiv W_i.$$

Or

$$\prod_{i'}{}'(\mathrm{Y}_i - \mathrm{Y}_{i'}) = x^{\mu-1}(\ldots),$$

et Z_i est divisible par x : donc pour que Ω devienne holomorphe, il faut que

$$|\mathrm{C}_i, \mathrm{P}_0| = \mu - 2.$$

L'origine est un point $(\mu-2)^{\text{uple}}$ de la courbe $\mathrm{P}_0 = 0$. Ce résultat a déjà été énoncé sans démonstration par Halphen (*Classification*, etc., p. 44).

21. Halphen a annoncé également (*Classification*, p. 43) qu'un point double, de quelque nature qu'il fût, n'entraînait pour P_0 aucune sujétion.

C'est ce qui est évident pour un point double à tangentes séparées : il suffit de faire $\mu = 2$ dans la démonstration du n° **20**.

Prenons maintenant un point de rebroussement; appelons $r + \frac{1}{2}$ l'ordre de contact mutuel pour les deux branches; il se conserve en projection sur les deux plans des xy et des xz, supposés orientés d'une façon quelconque.

Alors il viendra pour représenter la courbe, en transportant l'origine au rebroussement,

$$y = a_0 + t a_1, \qquad z = b_0 + t b_1, \qquad t^2 = x,$$

les a et les b étant holomorphes en x;

$$a_1 = \alpha x^r + \ldots, \qquad b_1 = \beta x^r + \ldots;$$

le quotient $b_1 : a_1$ est holomorphe; $\alpha, \beta = \text{const.}$

Appliquons le procédé de calcul du **6**; le procédé se réduit ici à l'élimination de t. Il viendra

$$\begin{vmatrix} z - b_0 & b_1 \\ y - a_0 & a_1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$z = b_0 + \frac{b_1(y - a_0)}{a_1}.$$

Comme $b_1 : a_1$ est holomorphe, z a déjà par lui-même le caractère de fonction entière. C. Q. F. D.

Ma méthode générale permet donc de retrouver avec facilité les divers résultats particuliers énoncés sans démonstration par Halphen.

22. Tout ce premier Chapitre se résume dans le théorème unique que voici.

« Quand on représente la courbe gauche algébrique G par les équations

$$f(x, y) = 0, \qquad z = P_1(x, y) : P_0(x, y),$$

où f est indécomposable de degré n égal à celui de G et où les degrés des polynomes P_1 et P_0 sont deux entiers consécutifs $s + 1$ et s respectivement,

» Alors le dénominateur P_0 peut être pris à volonté, pourvu que P_0

» I. S'annule en chaque point double apparent,

» II. Possède par rapport à chaque cycle de G, issu d'un point multiple, un ordre au moins égal à une limite inférieure fixe, pour chaque cycle. »

CHAPITRE II.

CALCUL DU NOMBRE $\mathfrak{N}$.

23. Prenons une courbe G de degré n représentée (22) par

$$z = P_1 : P_0, \qquad f = 0$$

et une surface algébrique, de degré N, $\mathfrak{F}$, représentée par l'équation,

$$[l = 0, 1, \ldots, N], \qquad F(x, y, z) = \sum_l A_{N-l} z^l = 0,$$

$A_{N-l} =$ polynome en x et y de degré $N - l$. Je vais exprimer que la courbe algébrique G est située sur la surface $\mathfrak{F}$.

24. Considérons les deux polynomes P_1 et P_0; en un point double apparent z a une valeur double et $P_0 = 0$, donc P_1 s'y évanouit aussi. En un point multiple $m_0(x_0, y_0, z_0)$ de G, prenons un des cycles C, issus de ce point, savoir

$$\left. \begin{aligned} y - y_0 &= \eta(t) \\ z - z_0 &= \zeta(t) \end{aligned} \right\} \; t^r = x - x_0,$$

η et ζ étant holomorphes en t et r désignant l'ordre du cycle. Alors

$$\begin{aligned} P_0(x_0 + t^r, y_0 + \eta(t)) &= t^{\alpha_0}[\ldots], \\ P_1(x_0 + t^r, y_0 + \eta(t)) &= t^{\alpha_1}[\ldots]. \end{aligned}$$

Avec nos notations habituelles (5)

$$\alpha_0 = |C, P_0|, \qquad \alpha_1 = |C, P_1|.$$

En m_0, z n'est ni nul, ni infini, mais a une valeur unique finie z_0, donc $\alpha_0 = \alpha_1$,

$$|C, P_1| = |C, P_0|.$$

P_1 peut donc (théorème du n° 22) servir de dénominateur à z; P_1 a

$s+1$ pour degré, le nouveau numérateur P_2 aura pour degré $s+2$. Raisonnons sur le couple (P_1, P_2) comme nous venons de le faire sur le couple (P_0, P_1); nous formerons un troisième couple (P_2, P_3) et ainsi de suite. Bref, sous le bénéfice de $f(x, y) = 0$, on a

$$z = \frac{P_1}{P_0} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_3}{P_2} = \frac{P_4}{P_3} = \ldots = \frac{P_l}{P_{l-1}} = \ldots,$$

d'où

$$z^l = \frac{P_l}{P_0};$$

$l =$ entier positif quelconque;
$P_l =$ polynome en x et y de degré $s+l$;
$P_0 =$ polynome en x et y de degré s.

25. Cela posé, remplaçons dans l'équation $F = 0$ de la surface $\mathfrak{s}$ (**23**) z^l par $P_l : P_0$ et chassons les dénominateurs. Le polynome de degré $s+N$

$$\Omega' = \sum_l A_{N-l} P_l \qquad [l = 0, 1, \ldots, N]$$

est nul en tous les points de la courbe g, $f = 0$. C'est la condition nécessaire et suffisante pour que la courbe G soit située sur $\mathfrak{s}$. Comme f est indécomposable, Ω' est divisible par f; appelons $-\omega$ le quotient qui est un polynome de degré $s+N-n$. L'expression de degré $s+N$

$$\Omega = \sum_l A_{N-l} P_l + \omega f \equiv 0.$$

Tout se réduit ainsi à établir l'évanouissement identique de Ω.

26. Appelons

$$\psi(n) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

le nombre des termes d'un polynome de degré n à deux variables. On voit de suite que, λ et μ étant quelconques,

$$(0) \qquad \psi(\lambda + \mu) = \psi(\lambda) + \psi(\mu) + \lambda\mu - 1,$$

$$(1) \qquad \psi(-\lambda) = \psi(\lambda - 3).$$

Telles sont les propriétés de la fonction ψ pour des valeurs quelconques de l'argument.

De même, je désignerai par

$$\Psi(N)+1=\frac{(N+1)(N+2)(N+3)}{6}$$

le nombre des coefficients dans un polynome à trois variables de degré N.

$\Psi(N)$ est ainsi le nombre des paramètres qui figurent dans l'équation d'une surface de degré N.

Dans les termes d'un polynome quelconque aux variables x, y, z, ..., savoir

$$\Sigma B x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma} \ldots,$$

je distinguerai les coefficients B et les *arguments*

$$x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma} \ldots.$$

Si le nombre des variables est q et le degré p, les termes successifs peuvent être désignés par les valeurs d'un seul indice variant de 1 à

$$\frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+q)}{q!}.$$

27. Cela posé, reprenons (25)

$$\Omega=\sum_{l} A_{N-l} P_l + \omega f.$$

Appelons $a_i[i=1, 2, \ldots, 1+\Psi(N)]$ et $b_j[j=1, 2, \ldots, \psi(s+N-n)]$ les coefficients du polynome à trois variables F de degré N et les coefficients du polynome à deux variables ω de degré $s+N-n$. Dans Ω, a_i est le coefficient d'une expression de degré $s+N$ telle que

$$B x^{\alpha} y^{\beta} P_l, \quad \alpha+\beta \leq N-l,$$

$B x^{\alpha} y^{\beta}$ provenant de A_{N-l}. Appelons $\varphi_k[k=1, 2, \ldots, \psi(s+N)]$ les *arguments* (26) successifs d'un polynome de degré $s+N$ à deux variables. Le terme en a_i dans Ω sera

$$a_i \sum_{k} d_{ik} \varphi_k = a_i \lambda_i.$$

Les d_{ik} sont des fonctions linéaires et homogènes des coefficients du polynome A_{N-l} et du polynome P_l séparément.

Pareillement dans Ω le terme en b_j sera

$$b_j \sum_k e_{jk} \varphi_k = b_j \mathfrak{B}_j;$$

e_{jk} est formé par les coefficients des polynomes ω et f, comme d_{ik} est formé par les coefficients des polynomes A_{N-l} et P_l.

Bref

$$\begin{aligned}\Omega \equiv \sum_i a_i \mathfrak{A}_i + \sum_j b_j \mathfrak{B}_j &= \sum_i \sum_k a_i d_{ik} \varphi_k \\ &+ \sum_j \sum_k b_j e_{jk} \varphi_k \\ &= \sum_k \varphi_k \left\{ \sum_i a_i d_{ik} + \sum_j b_j e_{jk} \right\} = \sum_k c_k \varphi_k,\end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, 1 + \Psi(N) \\ j = 1, 2, \ldots, \psi(s + N - n) \\ k = 1, 2, \ldots, \psi(s + N) \end{array} \right\}.$$

L'évanouissement identique de Ω entraîne les $\psi\,(s + N)$ équations $c_k = 0$, mais elles ne sont pas toutes distinctes. D'ailleurs [formules (0) et (1) du 26]

$$\begin{aligned}\psi(s + N - n) &= \psi(s + N) + \psi(-n) - ns - nN - 1, \\ \psi(s + N) - \psi(s + N - n) &= ns + nN + 1 - \psi(n - 3).\end{aligned}$$

Je ferai maintenant voir que le polynome Ω, loin d'être le plus général de son degré, satisfait au contraire, à cause de sa provenance, à plusieurs sujétions, lesquelles facilitent l'annulation identique de Ω.

28. Reprenons les polynomes P_l (24), dénominateurs successifs de z. Ils s'évanouissent tous aux points doubles apparents; de plus, C_i étant un cycle issu d'un point multiple, on a évidemment, en vertu des raisonnements faits au 24,

$$|C_i, P_l| = |C_i, P_0| = \mathfrak{I}_i,$$

en désignant par $\mathfrak{I}_i$ l'ordre commun des polynomes P_l par rapport au cycle. Donc

$$|C_i, \Omega| = \left| C_i, \sum_l A_{N-l} P_l + \omega f \right| = \mathfrak{I}_i,$$

puisque

$$|C_i, f| = \infty,$$

car le cycle C_i est situé sur la courbe g. C_i coupe ainsi la courbe $\Omega = 0$ en $\mathfrak{I}_i$ points confondus avec le point multiple, origine de C_i. Il y a donc

$$\mathfrak{I} = \sum_i \mathfrak{I}_i$$

points d'intersection des courbes g et $\Omega = 0$ confondus au point multiple considéré.

Les courbes $P_0 = 0$ et g se coupent :

1° En δ points doubles apparents, points doubles de g dont chacun figure pour deux dans la supputation des ns intersections;

2° En $\Sigma \mathfrak{I}$ points, réunis par $\mathfrak{I}$ aux points multiples, la sommation Σ s'étendant aux divers points multiples;

3° En

$$ns - 2\delta - \Sigma \mathfrak{I}$$

autres points, lesquels avec les δ points doubles apparents constituent un groupe que je nommerai groupe Δ.

Comme, en un point du groupe Δ, z n'est ni nul ni infini et que

$$z = \frac{P_1}{P_0} = \frac{P_2}{P_1} = \ldots = \frac{P_l}{P_{l-1}} = \ldots,$$

la courbe $P_l = 0$ et aussi la courbe $\Omega = 0$ passent par les points du groupe Δ, dont le nombre est

$$D = ns - \delta - \Sigma \mathfrak{I}.$$

Appelons

$$\varphi_k^{(m)} \qquad [m = 1, 2, \ldots, D]$$

les $\psi(s + N)[k = 1, 2, \ldots, \psi(s + N)]$ (27) arguments d'un polynome de degré $s + N$ à deux variables, arguments calculés respectivement pour les D points du groupe Δ.

Cette notation nous sera utile plus loin (30).

Retenons surtout de la présente discussion : 1° que $\Omega = 0$ coupe le cycle C_i en $\mathfrak{I}_i$ points confondus à l'origine du cycle et 2° passe par les D points du groupe Δ.

29. Examinons ce qui résulte pour Ω de la présence des points multiples.

Soit

$$[k=1, 2, \ldots, \psi(s+\mathrm{N})], \qquad \mathrm{H}=\sum_k h_k \varphi_k \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{H}(x, y)$$

un polynome quelconque de degré $s+\mathrm{N}$.

Développons-le par rapport à un cycle C_i

$$x-x_0=t^r, \qquad y-y_0=\eta(t);$$

il viendra

$$\mathrm{H}[x_0+t^r, y_0+\eta(t)]=\mathrm{H}_0+\mathrm{H}_1 t+\mathrm{H}_2 t^2+\ldots;$$

se donner le nombre

$$\mathfrak{A}_i=|\mathrm{C}_i, \mathrm{H}|,$$

c'est écrire les $\mathfrak{A}_i$ relations

$$\mathrm{H}_0=\mathrm{H}_1=\ldots=\mathrm{H}_{\mathfrak{A}_i-1}=0,$$

c'est-à-dire assujettir les h_k à $\mathfrak{A}_i$ relations linéaires et homogènes

$$\sum_k \lambda_{pk}^{(i)} h_k=0 \qquad [p=1, 2, \ldots, \mathfrak{A}_i].$$

Les $\lambda_{pk}^{(i)}$ sont les mêmes quel que soit le polynome H de degré $s+\mathrm{N}$.

Si l'on se donne tous les nombres

$$|\mathrm{C}_i, \mathrm{H}|=\mathfrak{A}_i$$

pour les divers cycles issus d'un point multiple, on établit entre les h_k les $\mathfrak{A}=\sum_i \mathfrak{A}_i$ relations

$$\sum_k \lambda_{pk} h_k=0 \qquad [p=1, 2, \ldots, \mathfrak{A}].$$

De même pour un second point multiple on aura le système

$$\sum_k \lambda'_{p'k} h_k=0 \qquad [p'=1, 2, \ldots, \mathfrak{A}']$$

et ainsi de suite, soit en tout $\mathfrak{A}+\mathfrak{A}'+\ldots=\Sigma\mathfrak{A}$ relations, Σ étant la sommation appliquée aux différents points multiples.

Il est évident, d'après ce qui précède (28), que le polynome de degré $s+\mathrm{N}$ (27)

$$\sum_i a_i \mathcal{A}_i + \sum_j b_j \mathcal{B}_j \equiv \Omega \equiv \sum_k c_k \varphi_k \qquad [k=1,\,2,\,\ldots,\,\psi(s+\mathrm{N})]$$

satisfait aux conditions précédentes, ainsi que chacun des polynomes $\mathcal{A}_i$ et $\mathcal{B}_j$. Comme (27)

$$\mathcal{A}_i = \sum_k d_{ik}\varphi_k, \qquad \mathcal{B}_j = \sum_k e_{jk}\varphi_k,$$

il viendra

$$\sum_k \lambda_{pk} c_k = \sum_k \lambda_{pk} d_{ik} = \sum_k e_{jk}\lambda_{pk} = 0,$$

$$\sum \lambda'_{pk} c_k = \sum \lambda'_{pk} d_{ik} = \sum e_{jk}\lambda'_{pk} = 0.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Cette remarque nous servira plus loin (30).

30. L'annulation identique de Ω entraîne le système Ξ de $\psi(s+\mathrm{N})$ équations $c_k=0$ $[k=1,\,2,\,\ldots,\,\psi(s+\mathrm{N})]$. Ξ est équivalent au système Ξ'

$$(\Xi') \qquad \sum_k \mu_{qk} c_k = 0 \qquad [q=1,\,2,\,\ldots,\,\psi(s+\mathrm{N})],$$

pourvu que le déterminant μ des μ_{qk} soit $\neq 0$.

Formons la matrice à $\psi(s+\mathrm{N})$ colonnes et à $\mathrm{D}+\Sigma\mathfrak{A} = ns-\delta$ (28) lignes

$$\mathfrak{M} = \left\| \begin{matrix} \varphi_1^{(1)} & \varphi_2^{(1)} & \cdots & \varphi_k^{(1)} & \cdots & \varphi_{\psi(s+\mathrm{N})}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \varphi_1^{(\mathrm{D})} & \varphi_2^{(\mathrm{D})} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_{1,\psi(s+\mathrm{N})} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \lambda_{31} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \lambda'_{11} & \lambda'_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \end{matrix} \right\|.$$

Dans la matrice $\mathfrak{M}$

$$\mathrm{D} = ns - \delta - \Sigma\mathfrak{A}$$

est le nombre des points du groupe Δ (28); les $\varphi_k^{(m)}$ ont la signification expliquée au n° 28 (*in fine*); les $\lambda, \lambda', \ldots$ ont le sens indiqué au n° 29. La matrice a $D + \Sigma \mathfrak{A} = ns - \delta$ lignes, mais plusieurs lignes (parmi celles qui sont en $\lambda, \lambda', \ldots$) peuvent être à éléments tous nuls; ensuite, ces lignes une fois biffées, la matrice restante peut avoir tous ses déterminants, à $[\psi(s+N)]^2$ éléments, nuls, ce qui entraînera chaque fois une même relation linéaire et homogène entre les éléments d'une colonne quelconque et réduira encore le nombre de lignes dans la matrice.

Bref, on formera une matrice réduite $\mathfrak{M}_0$ dont les déterminants ne seront pas tous nuls, mais qui ne contiendra plus que

$$ns - \delta - \varpi$$

lignes. L'entier, non négatif, ϖ dépendra à la fois des $\varphi_k^{(m)}$, c'est-à-dire de la configuration du groupe Δ, et des λ, c'est-à-dire des coefficients des cycles, ou encore des modules de la courbe G.

31. Maintenant nous pouvons former le système Ξ' (30) en prenant les éléments de la matrice $\mathfrak{M}_0$ pour constituer les

$$ns - \delta - \varpi$$

premières lignes du tableau des μ_{qk}; les

$$\psi(s+N) - ns + \delta + \varpi$$

lignes suivantes étant constituées par des quantités quelconques, choisies de façon que le déterminant μ des μ_{qk} soit $\mu \neq 0$.

Or (28)

$$\begin{aligned}\sum_k \varphi_k^{(m)} c_k &= \sum_k \varphi_k^{(m)} \left\{ \sum_i a_i d_{ik} + \sum_j b_j e_{jk} \right\} \\ &= \sum_i a_i \sum_k d_{ik} \varphi_k^{(m)} + \sum_j b_j \sum_k e_{jk} \varphi_k^{(m)} = 0,\end{aligned}$$

indépendamment des a_i et b_j, puisque les courbes (27)

$$\mathcal{A}_i = \sum_k d_{ik} \varphi_k = 0, \qquad \mathcal{B}_j = \sum_k e_{jk} \varphi_k = 0$$

passent par tous les points du groupe Δ.

Il en est de même pour la relation

$$\sum_k \lambda_{pk} c_k = \sum_k \lambda_{pk} \left\{ \sum_i a_i d_{ik} + \sum_j b_j e_{jk} \right\}$$
$$= \sum_i a_i \sum_k \lambda_{pk} d_{ik} + \sum_j b_j \sum_k \lambda_{pk} e_{jk} \equiv 0,$$

car les courbes $\mathcal{A}_i = 0$ et $\mathcal{B}_j = 0$ satisfont aux relations du n° **29**.

32. En résumé, les $ns - \delta - \varpi$ premières équations du système Ξ' sont des identités et n'entraînent aucune sujétion mutuelle de la courbe G et de la surface $\mathfrak{f}$. Les

$$\psi(s + \mathrm{N}) - ns + \delta + \varpi$$

équations suivantes du système Ξ' contiennent les coefficients a_i de la surface $\mathfrak{f}$ et aussi les $\psi(s + \mathrm{N} - n)$ quantités b_j, coefficients du polynome ω (25). Eliminons les b_j, il restera

$$\psi(s + \mathrm{N}) - \psi(s + \mathrm{N} - n) - ns + \delta + \varpi$$

relations entre les a_i. Le fait géométrique, savoir que la surface $\mathfrak{f}$ passe par la courbe G, est ainsi exprimé par

$$\mathfrak{M} = \psi(s + \mathrm{N}) - \psi(s + \mathrm{N} - n) - ns + \delta + \varpi$$

relations entre les coefficients de $\mathfrak{f}$.

On a vu (27) que

$$\psi(s + \mathrm{N}) - \psi(s + \mathrm{N} - n) = ns + n\mathrm{N} + 1 - \psi(n - 3),$$

Alors s disparaît (comme il fallait s'y attendre, car le degré s du polynome P_0 est indéterminé au-dessus d'une certaine limite) et il reste

$$\mathfrak{M} = n\mathrm{N} + 1 - \psi(n - 3) + \delta + \varpi.$$

Introduisons le genre commun p de G et de sa projection g; on aura

$$p = \psi(n - 3) - \delta - \Sigma \zeta,$$

car chaque point double apparent réduit le genre d'une unité. La sommation Σ comprend les divers points multiples, dont chacun réduit le genre du nombre ζ.

Bref

$$\mathfrak{N} = n\mathrm{N} + 1 - p - \Sigma\mathfrak{L} + \varpi.$$

C'est la généralisation de la formule d'Halphen. La signification géométrique de l'entier non négatif ϖ est donnée ci-après (35).

On peut, au lieu du genre, introduire le nombre Λ des tangentes à G qui rencontrent une droite fixe quelconque de l'espace. Λ est aussi la classe de la courbe plane g. Appelons $\mathfrak{R}$ le nombre dont un point multiple réduit la classe de g

$$\Lambda = n(n-1) - 2\delta - \Sigma\mathfrak{R},$$

d'où

$$2\delta = n(n-1) - \Lambda - \Sigma\mathfrak{R}$$

et

$$2\mathfrak{N} = 2n(\mathrm{N}+1) - \Lambda - \Sigma\mathfrak{R} + 2\varpi.$$

33. Il reste à rappeler comment on calcule le nombre $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{R}$ pour chaque point multiple m, origine, avec notre terminologie ordinaire, de M cycles C_i $[i = 1, 2, \ldots, \mathrm{M}]$, d'ordre n_i respectivement.

Occupons-nous d'abord de l'entier $\mathfrak{R}$ qui mesure l'abaissement de classe produit par le point multiple. Si chaque cycle C_i abaisse la classe de $\mathfrak{R}_i$ unités, $\mathfrak{R} = \sum_i \mathfrak{R}_i$, car $\mathfrak{R}$ est le nombre des points, absorbés par le point multiple, communs à la courbe g avec le réseau des premières polaires. Halphen enseigne à calculer $\mathfrak{R}_i$ (*Appendice au Traité de Salmon*, p. 645). Prenons pour origine le point multiple, pour axe des x la tangente au cycle C_i. Alors, si $f(x, y) = 0$ est l'équation de g,

$$\mathfrak{R}_i = \left| \mathrm{C}_i, \frac{\partial f}{\partial y} \right|.$$

Or, avec notre écriture habituelle,

$$f(x, y) = \Psi(x, y) \prod_{ij} (y - y_{ij}),$$

Ψ se rapportant aux déterminations de y qui ne s'évanouissent pas pour $x = 0$. Le même calcul qu'au n° 13 montre que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y=y_{ij}} \equiv \Psi(x, y_{ij}) \prod_{i'j'}' (y_{ij} - y_{i'j'}),$$

$\Psi(x, y_{ij}) \neq 0$ pour $x = 0$. Nous pouvons ainsi calculer l'ordre en x

des différences $y_{ij} - y_{i'j'}$ de l'expression $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y=y_{ij}}$. Le calcul de $\mathfrak{R}_i$ ne présente plus dès lors aucune difficulté.

Ce qu'il importe de retenir c'est que, pour évaluer $\mathfrak{R}$, on n'a besoin de connaître qu'un nombre fini des premiers termes dans les développements en série, afférents à chaque point multiple.

34. Occupons-nous du nombre $\mathfrak{L}$ qui mesure l'abaissement du genre produit par le point multiple. Halphen (*Appendice*, etc., p. 624, formule 28) a démontré la relation que j'écris, avec mes notations accoutumées, ainsi qu'il suit

$$2(p-1) = \Lambda - 2n + \sum\sum_i (n_i - 1).$$

Or (32)

$$\Lambda = n(n-1) - 2\delta - \Sigma\mathfrak{R}$$

d'où, éliminant Λ, $\psi(n-3) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$,

$$p = \psi(n-3) - \delta - \tfrac{1}{2}\Sigma\left\{\mathfrak{R} - \sum_i (n_i - 1)\right\}.$$

Mais (32)

$$p = \psi(n-3) - \delta - \Sigma\mathfrak{L};$$

enfin

$$\mathfrak{L} = \tfrac{1}{2}\left\{\mathfrak{R} - \sum_i (n_i - 1)\right\}.$$

Il suffit donc encore de connaître les développements en série.

35. On peut donner du nombre ϖ qui figure dans la formule (32)

$$\mathfrak{N} = nN + 1 - p - \Sigma\mathfrak{L} + \varpi$$

une interprétation géométrique simple.

Reprenons (28) les sn points $f = P_0 = 0$. Ce sont les

$$D = ns - \delta - \Sigma\mathfrak{A}$$

points du groupe Δ, puis, en un point multiple, $\mathfrak{A}$ points, savoir $\mathfrak{A}_i$ points sur chacun des cycles C_i de $g, f = 0$, issus du point multiple, $\mathfrak{A} = \sum_i \mathfrak{A}_i$.

Prenons une courbe quelconque de degré $s+N$, qui sera, avec les notations du n° 27,

$$o = Q = \sum_k q_k \varphi_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, \psi(s+N).$$

Faisons passer $Q = o$ par les points du groupe Δ, au nombre de D (28); il viendra

$$o = \sum_k q_k \varphi_k^{(m)} \qquad [m = 1, 2, \ldots, D].$$

D'autre part, les relations (29)

$$o = \sum_k \lambda_{pk}^{(i)} q_k \qquad [p = 1, 2, \ldots, \mathfrak{K}_i]$$

expriment que

$$|C_i, Q| = \mathfrak{K}_i,$$

c'est-à-dire que $Q = o$ passe par les $\mathfrak{K}_i$ points communs au cycle C_i de g avec la courbe $P_0 = o$.

Cela posé, formons (30) les matrices $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}_0$, cette dernière à

$$ns - \delta - \varpi$$

lignes. La condition de passer par les sn points $f = P_0 = o$ équivaut donc pour les coefficients de Q à $ns - \delta - \varpi$ relations linéaires, homogènes distinctes.

Supposons que l'ensemble des courbes de degré $s+N$ qui passent par les sn points $P_0 = f = o$ soit $(h-1)^{\text{uplement}}$ infini. Il restera dans Q h coefficients arbitraires; donc

$$h = \psi(s+N) - ns + \delta + \varpi,$$
$$\varpi = h - \psi(s+N) + ns - \delta.$$

C'est le résultat annoncé dans l'Introduction.

36. Lorsque l'on possède la courbe G, on a aussi g et l'on peut calculer exactement ϖ et $\mathfrak{N}$. Mais si l'on ne possède que n, p, avec les singularités, c'est-à-dire les développements en série afférents à chaque point multiple, on ne peut obtenir exactement ϖ. Tout ce que

l'on peut alors affirmer sur $\mathfrak{M}$, c'est que $\mathfrak{M}$ est compris entre

$$\begin{aligned}&\text{une limite supérieure } nN+1,\\ &\text{une limite inférieure } nN+1-p-\Sigma\alpha.\end{aligned}$$

A peine est-il besoin de rappeler que rien ne change à la théorie si les ns points $P_0=f=0$ ont des configurations particulières; si des points du groupe Δ, par exemple, viennent en des points multiples, les $\mathfrak{A}$ seraient plus grands, voilà tout.

37. Dans un Mémoire qui doit incessamment paraître dans le *Journal de l'École Polytechnique*, je donne pour $\mathfrak{M}$ une autre formule, dans le cas particulier où G est une de ces courbes que j'ai appelées *intégrantes* et qui ont toutes leurs tangentes situées sur un certain complexe linéaire *capital*.

Prenons $\mathfrak{F}(z_1, z_2, z_3, z_4)=0$ avec $p_j=\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial z_j}$, pour équation de la surface $\mathfrak{F}$ en coordonnées homogènes et posons

$$\Theta=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4\\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4\\ z_2 & -z_1 & -z_4 & z_3\end{vmatrix}.$$

Supposons qu'en un de ses points multiples, m, G perce en $\mathfrak{P}$ points, confondus avec m, la surface $\Theta=0$, alors

$$nN=\Lambda+\Sigma\mathfrak{P},$$

Σ s'étendant aux divers points multiples de l'intégrante G.

On a d'ailleurs toujours

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}&=nN+1-\frac{(n-1)(n-2)}{2}+\delta+\varpi,\\ \Lambda&=n(n-1)-2\delta-\Sigma\mathfrak{R}.\end{aligned}$$

L'élimination de Λ et δ fournit la formule annoncée

$$\mathfrak{M}=\varpi+\frac{n(N+2)+\Sigma(\mathfrak{P}-\mathfrak{R})}{2}.$$

Supposons qu'entre les

$$\Psi(N)=\frac{(N+1)(N+2)(N+3)}{6}-1$$

paramètres de f, les $\mathfrak{N}$ relations se réduisent à $\mathfrak{N} - \rho$ distinctes

$$\mathfrak{N} - \rho \leqq \Psi(N),$$

$$n \leqq \frac{2\Psi(N) + 2(\rho - \varpi) + \Sigma(\mathcal{R} - \mathcal{P})}{N + 2}.$$

Ainsi n se trouverait limité si $\rho - \varpi$ et $\Sigma(\mathcal{R} - \mathcal{P})$ le sont.

On aperçoit là le moyen de limiter dans certains cas ce degré d'une intégrante algébrique G à singularités connues.

Pour plus de détails, je renvoie au Travail que je viens de citer.

FIN.

22246 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

ANNALES DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

VOLUMES PARUS AU 10 OCTOBRE 1895

La doctrine de Malherbe d'après son commentaire sur Desportes, par Ferdinand BRUNOT, docteur ès lettres, ancien élève de l'École normale supérieure, chargé d'un Cours complémentaire à la Faculté des Lettres, lauréat de l'Académie française. 1 vol. grand in-8°, avec 5 planches hors texte. . . . . . 10 fr.

Recherches anatomiques et expérimentales sur la métamorphose des Amphibiens anoures, par E. BATAILLON, préparateur de Zoologie à la Faculté des Sciences, avec 6 pl. hors texte. 4 fr.

Anatomie et Physiologie comparées de la Pholade dactyle. Structure, locomotion, tact, olfaction, gustation, action dermatoptique, photogénie, avec une théorie générale des sensations, par le Dr Raphaël DUBOIS, professeur de Physiologie générale et comparée à la Faculté, avec 68 figures dans le texte et 15 planches hors texte . . . . . 18 fr.

Sur le pneumogastrique des oiseaux, par E. COUVREUR, docteur ès sciences, chef des travaux de physiologie à la Faculté des sciences, avec 3 planches hors texte et graphiques dans le texte. . . . 4 fr.

Recherches sur la valeur morphologique des appendices superstaminaux de la fleur des Aristoloches, par Mlle A. MAYOUX, élève de la Faculté des Sciences, avec 3 planches hors texte. . . . 4 fr.

Sur la théorie des équations différentielles du premier ordre et du premier degré, par Léon AUTONNE, Ingénieur des Ponts et Chaussées, Docteur ès sciences mathématiques . . . . 9 fr.

Recherches sur l'équation personnelle dans les observations astronomiques de passages, par F. GONNESSIAT, Aide-Astronome à l'Observatoire, chargé d'un Cours complémentaire d'Astronomie à la Faculté des Sciences . . . . . 5 fr.

Lettres intimes de J.-M. Alberoni adressées au comte I. Rocca, ministre des finances du duc de Parme, et publiées d'après le manuscrit du collège de S. Lazaro Alberoni, par Emile BOURGEOIS, professeur à la Faculté des Lettres, avec un portrait et deux fac-similé. . 10 fr.

Le Fondateur de Lyon, Histoire de L. Munatius Plancus, par M. JULLIEN, professeur-adjoint à la Faculté des Lettres, avec 1 planche hors texte . . . . 5 fr.

Etude stratigraphique sur le Jurassique inférieur du Jura méridional, par Attale RICHE, docteur ès sciences, avec planches hors texte. . . . . . . 12 fr.

Etude expérimentale sur les propriétés attribuées à la tuberculine de M. Koch, faite au laboratoire de médecine expérimentale et comparée de la Faculté de Lyon, par M. le professeur ARLOING, M. le Dr RODET, agrégé, et M. le Dr COURMONT, avec planches en couleurs. 10 fr.

Histologie comparée des Ebénacées dans ses rapports avec la Morphologie et l'histoire généalogique de ces plantes, par Paul PARMENTIER, professeur de l'Université, avec 4 pl. hors texte. 4 fr.

Recherches sur la production et la localisation du Tannin chez les fruits comestibles fournis par la famille des Pomacées, par Mlle A. MAYOUX, élève de la Faculté des Sciences de Lyon. 1 vol. in-8°, avec 2 planches. . . . . . 3 fr.

Essai critique sur l'hypothèse des atomes dans la science contemporaine, par Arthur HANNEQUIN, chargé d'un Cours complémentaire de philosophie à la Faculté des lettres de Lyon. 1 vol. in-8°. 7 fr. 50

Saint Ambroise et la morale chrétienne au IVe siècle, par Raymond THAMIN, ancien élève de l'École normale supérieure, ancien maître de conférences à la Faculté des lettres de Lyon, professeur de philosophie au lycée Condorcet. 1 vol. in-8°. . . . . 7 fr. 50

Etude sur le Bilharzia hæmatobia et la Bilharziose, par M. LORTET, doyen de la Faculté de médecine de Lyon, et VIALLETON, professeur agrégé à la Faculté de médecine de Lyon. 1 vol. in-8°, avec planches et figures dans le texte. 10 fr.

Recherches sur quelques dérivés surchlorés du phénol et du benzène, par Etienne BARRAL, docteur en médecine, pharmacien de 1re classe, chargé des fonctions d'agrégé à la Faculté de médecine de Lyon. . . . . . . 5 fr.

Phonétique historique et comparée du sanscrit et du zend, par Paul REGNAUD, professeur de sanscrit et de grammaire comparée à la Faculté des lettres de Lyon. 1 vol. in-8° . . . . 5 fr.

La République des Provinces-Unies, la France et les Pays-Bas espagnols de 1630 à 1650, par A. WADDINGTON, professeur-adjoint à la Faculté des lettres de Lyon. Tome I (1630-42.) . . . 6 fr.

Sur la représentation des courbes gauches algébriques, par Léon AUTONNE, ingénieur des ponts et chaussées, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Lyon.

Paris. — Imprimerie L. MARETHEUX, 1, rue Cassette. — 6976.